PI 制御解析解の導出(1 段完全混合槽トレーサー濃度を PI 制御する場合)

$$m = k\left[\left\{C_{obj} - C(t)\right\} + \left(\frac{1}{T_I}\right)\int_0^t \left\{C_{obj} - C(t)\right\}dt\right]$$

$$\frac{dC}{dt} = \frac{m - FC}{V} = \frac{k\left[\left\{C_{obj} - C\right\} + \left(\frac{1}{T_I}\right)\int_0^t \left\{C_{obj} - C\right\}dt\right] - FC}{V}$$

ラプラス変換し、初期値 C(0)=0 を代入する

$$sC(s) = \frac{k\left[\left\{\frac{C_{obj}}{s} - C(s)\right\} + \left(\frac{1}{T_I}\right)\left(\frac{C_{obj}}{s^2} - \frac{C(s)}{s}\right)\right] - FC(s)}{V}$$

$$sVC(s) + (k+F)C(s) + \left(\frac{k}{T_I}\right)\frac{C(s)}{s} = k\frac{C_{obj}}{s} + \left(\frac{k}{T_I}\right)\frac{C_{obj}}{s^2}$$

$$\left(sV + (k+F) + \left(\frac{k}{T_I}\right)\frac{1}{s}\right)C(s) = \left(\frac{k}{s} + \left(\frac{k}{T_I}\right)\frac{1}{s^2}\right)C_{obj}$$

$$C(s) = \frac{ks + \left(\frac{k}{T_I}\right)}{s^3V + (k+F)s^2 + \left(\frac{k}{T_I}\right)s}C_{obj} = \frac{\frac{1}{V}\left[ks + \left(\frac{k}{T_I}\right)\right]}{\left[s^2 + \frac{(k+F)}{V}s + \left(\frac{k}{VT_I}\right)\right]s}C_{obj}$$

分母は s の 3 次式なので次の通り 3 つの項の和としてそれぞれのパラメーターを求める。

$$\frac{C(s)}{C_{obj}} = \frac{\left(\frac{k}{V}\right)s + \left(\frac{k}{VT_I}\right)}{\left[s^2 + \frac{(k+F)}{V}s + \left(\frac{k}{VT_I}\right)\right]s} = \frac{p}{s+a} + \frac{q}{s+b} + \frac{r}{s}$$

$$= \frac{ps(s+b) + qs(s+a) + r(s+a)(s+b)}{s(s+a)(s+b)} = \frac{(p+q+r)s^2 + (pb+qa+r(a+b))s + abr}{s(s+a)(s+b)}$$

$$p + q + r = 0$$

$$r = -(p+q)$$

r を消去して次式が得られる。

$$\frac{C(s)}{C_{obj}} = \frac{(pb+qa-(p+q)(a+b))s - ab(p+q)}{s(s+a)(s+b)} = \frac{-(pa+qb)s - ab(p+q)}{s\left(s^2 + (a+b)s + ab\right)} = \frac{\left(\frac{k}{V}\right)s + \left(\frac{k}{VT_I}\right)}{\left[s^2 + \frac{(k+F)}{V}s + \left(\frac{k}{VT_I}\right)\right]s}$$

分母の各項の係数が一致する条件。

$$a + b = \frac{(k+F)}{V}$$

$$ab = \left(\frac{k}{VT_I}\right)$$

2 次方程式の判別式 D が次式で与えられるので a,b はそれぞれ D を用いて与えられる。

$$D=\left(\frac{k+F}{V}\right)^2-4\left(\frac{k}{VT_I}\right)$$

$$a=\frac{\dfrac{(k+F)}{V}+\sqrt{D}}{2}$$

$$b=\frac{\dfrac{(k+F)}{V}-\sqrt{D}}{2}$$

分子の各項の係数が一致する条件から次が得られる。

$$(pa+qb)=-\frac{k}{V}$$

$$ab(p+q)=\left(\frac{k}{VT_I}\right)(p+q)=-\left(\frac{k}{VT_I}\right)$$

D がゼロで無い場合。

$$p+q=-1$$

$$r=-(p+q)=1$$

$$pa+(-1-p)b=p(a-b)-b=-\frac{k}{V}$$

$$p=\frac{b-\dfrac{k}{V}}{(a-b)}=\frac{b-\dfrac{k}{V}}{\sqrt{D}}=\frac{\dfrac{\dfrac{(k+F)}{V}-\sqrt{D}}{2}-\dfrac{k}{V}}{\sqrt{D}}=\frac{\dfrac{(k+F)}{V}-\sqrt{D}-\dfrac{2k}{V}}{2\sqrt{D}}=\frac{\dfrac{(-k+F)}{V}-\sqrt{D}}{2\sqrt{D}}$$

$$=\frac{(-k+F)}{2V\sqrt{D}}-\frac{1}{2}=\frac{(-k+F)\sqrt{D}}{2VD}-\frac{1}{2}$$

$$q=-1-p=-1-\left(\frac{(-k+F)}{2V\sqrt{D}}-\frac{1}{2}\right)=-\frac{(-k+F)\sqrt{D}}{2VD}-\frac{1}{2}$$

a,b,p,q,r を代入して次式を得る。

$$\frac{C(s)}{C_{obj}}=\frac{p}{s+a}+\frac{q}{s+b}+\frac{r}{s}=\frac{\dfrac{(-k+F)\sqrt{D}}{2VD}-\dfrac{1}{2}}{s+\dfrac{\dfrac{(k+F)}{V}+\sqrt{D}}{2}}+\frac{-\left(\dfrac{(-k+F)\sqrt{D}}{2VD}\right)-\dfrac{1}{2}}{s+\dfrac{\dfrac{(k+F)}{V}-\sqrt{D}}{2}}+\frac{1}{s}$$

逆変換する。

$D>0$ のときは D の平方根が実数になる。

$$\frac{C(t)}{C_{obj}}=\left(\frac{(-k+F)\sqrt{D}}{2VD}-\frac{1}{2}\right)exp\left(-\frac{\dfrac{(k+F)}{V}+\sqrt{D}}{2}t\right)+\left(-\left(\frac{(-k+F)\sqrt{D}}{2VD}\right)-\frac{1}{2}\right)exp\left(-\frac{\dfrac{(k+F)}{V}-\sqrt{D}}{2}t\right)+1$$

$$D=\left(\frac{k+F}{V}\right)^2-4\left(\frac{k}{VT_I}\right)$$

$D<0$ のときは D の平方根が虚数になる。 $\sqrt{D}=j\sqrt{|D|}$

$$\frac{C(t)}{C_{obj}}=\left(\frac{(-k+F)\sqrt{|D|}}{2VD}j-\frac{1}{2}\right)\exp\left(-\frac{\frac{(k+F)}{V}+j\sqrt{|D|}}{2}t\right)+\left(-\left(\frac{(-k+F)\sqrt{|D|}}{2VD}\right)j-\frac{1}{2}\right)\exp\left(-\frac{\frac{(k+F)}{V}-j\sqrt{|D|}}{2}t\right)+1$$

$$=\left(\frac{(-k+F)\sqrt{|D|}}{2VD}j-\frac{1}{2}\right)\left[\exp\left(-\frac{(k+F)}{2V}t\right)\exp\left(-j\frac{\sqrt{|D|}}{2}t\right)\right]$$

$$+\left(-\left(\frac{(-k+F)\sqrt{|D|}}{2VD}\right)j-\frac{1}{2}\right)\left[\exp\left(-\frac{(k+F)}{2V}t\right)\exp\left(j\frac{\sqrt{|D|}}{2}t\right)\right]+1$$

$$=\left(\frac{(-k+F)\sqrt{|D|}}{2VD}j-\frac{1}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{\sqrt{|D|}}{2}t\right)-j\sin\left(\frac{\sqrt{|D|}}{2}t\right)\right]\exp\left(-\frac{(k+F)}{2V}t\right)$$

$$+\left(-\left(\frac{(-k+F)\sqrt{|D|}}{2VD}\right)j-\frac{1}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{\sqrt{|D|}}{2}t\right)+j\sin\left(\frac{\sqrt{|D|}}{2}t\right)\right]\exp\left(-\frac{(k+F)}{2V}t\right)+1$$

$$=\left[-\cos\left(\frac{\sqrt{|D|}}{2}t\right)+\frac{(-k+F)\sqrt{|D|}}{VD}\sin\left(\frac{\sqrt{|D|}}{2}t\right)\right]\exp\left(-\frac{(k+F)}{2V}t\right)+1$$

$$\frac{\mathrm{C(t)}}{\mathrm{C_{obj}}}=\left[-\cos\left(\frac{\sqrt{|\mathrm{D}|}}{2}\mathrm{t}\right)+\frac{(-\mathrm{k}+\mathrm{F})\sqrt{|\mathrm{D}|}}{\mathrm{VD}}\sin\left(\frac{\sqrt{|\mathrm{D}|}}{2}\mathrm{t}\right)\right]\exp\left(-\frac{(\mathrm{k}+\mathrm{F})}{2\mathrm{V}}\mathrm{t}\right)+1$$

$D=0$ の場合

$$D=\left(\frac{k+F}{V}\right)^2-4\left(\frac{k}{VT_I}\right)=0$$

$$\frac{(k+F)^2}{4Vk}-\left(\frac{1}{T_I}\right)=0$$

$$\left(\frac{1}{T_I}\right)=\frac{(k+F)^2}{4Vk}$$

$$\frac{C(s)}{C_{obj}}=\frac{(pb+qa-(p+q)(a+b))s-ab(p+q)}{s(s+a)(s+b)}=\frac{-(pa+qb)s-ab(p+q)}{s\left(s^2+(a+b)s+ab\right)}=\frac{\left(\frac{k}{V}\right)s+\left(\frac{k}{VT_I}\right)}{\left[s^2+\frac{(k+F)}{V}s+\left(\frac{k}{VT_I}\right)\right]s}$$

$$\frac{C(s)}{C_{obj}}=\frac{\left(\frac{k}{V}\right)s+\left(\frac{k}{VT_I}\right)}{\left[s^2+\frac{(k+F)}{V}s+\left(\frac{k}{VT_I}\right)\right]s}=\frac{p}{(s+a)^2}+\frac{q}{s+a}+\frac{r}{s}$$

$$=\frac{ps+qs(s+a)+r(s+a)^2}{s(s+a)^2}=\frac{(q+r)s^2+(p+qa+2ra)s+ra^2}{s(s+a)^2}$$

$$q+r=0$$

$$r=-q$$

$$\frac{C(s)}{C_{obj}}=\frac{\left(\frac{k}{V}\right)s+\left(\frac{k}{VT_I}\right)}{\left[s^2+\frac{(k+F)}{V}s+\left(\frac{k}{VT_I}\right)\right]s}=\frac{(p-ra+2ra)s+ra^2}{s(s+a)^2}=\frac{(p+ra)s+ra^2}{s(s+a)^2}$$

$$p+ra=\frac{k}{V}$$

$$ra^2=\frac{k}{VT_I}$$

分母の条件より $a=\left(\frac{k+F}{2V}\right)$

$$D=\left(\frac{k+F}{V}\right)^2-4\left(\frac{k}{VT_I}\right)=4\left[\left(\frac{k+F}{2V}\right)^2-\left(\frac{k}{VT_I}\right)\right]=0$$

$$r=\frac{k}{a^2VT_I}=1$$

$$q=-r=-1$$

$$p=\frac{k}{V}-ra=\frac{k}{V}-\frac{k+F}{2V}=\frac{2k-k-F}{2V}=\frac{k-F}{2V}$$

$$\frac{C(s)}{C_{obj}}=\frac{\frac{k-F}{2V}}{(s+a)^2}-\frac{1}{s+a}+\frac{1}{s}$$

$$\frac{C(s)}{C_{obj}}=\frac{\frac{k-F}{2V}}{(s+a)^2}-\frac{1}{s+a}+\frac{1}{s}$$

$$\frac{C(t)}{C_{obj}}=\left(\frac{k-F}{2V}\right)t\,exp(-at)-exp(-at)+1$$