<7 週>ラプラス変換について学ぶ(教科書第 2 章 p.9-24)

より良い理解のためにラプラス変換法の基礎を学ぶ

ラプラス変換とは：ステップ応答の形を評価するための一つの方法

時間の関数 $f(t)$に exp(-st)の重みをつけて積分する。(s は複素数)

$$F(s)=\int_0^\infty f(t)exp(-st)dt$$

例:$f(t)=a$(一定値)のとき

$$F(s)=\int_0^\infty a\,exp(-st)dt=a\int_0^\infty exp(-st)dt=\frac{a}{s}$$

線形性　$f(t)+g(t)$のラプラス変換は $F(s)+G(s)$になる。

$$\int_0^\infty \{f(t)+g(t)\}exp(-st)dt=\int_0^\infty f(t)exp(-st)dt+\int_0^\infty g(t)exp(-st)dt=F(s)+G(s)$$

exp(-t/T) のラプラス変換

$$F(s)=\int_0^\infty exp\left(-\frac{t}{T}\right)exp(-st)dt=\int_0^\infty exp\left(-\left(s+\frac{1}{T}\right)t\right)dt=\frac{1}{s+\frac{1}{T}}=\frac{T}{Ts+1}$$

<u>微分のラプラス変換</u>

まず、関数の積の微分

$$\frac{d}{dt}(g(t)h(t))=g(t)\frac{dh}{dt}+\frac{dg}{dt}h(t)$$

(微分×関数)の積分

$$\frac{dg(t)}{dt}h(t)=\frac{d}{dt}(g(t)h(t))-g(t)\frac{dh(t)}{dt}$$

$$\int\left[\frac{dg(t)}{dt}h(t)\right]dt=\int\left[\frac{d}{dt}(g(t)h(t))\right]dt-\int\left[g(t)\frac{dh(t)}{dt}\right]dt=g(t)h(t)-\int\left[g(t)\frac{dh(t)}{dt}\right]dt$$

微分のラプラス変換

$$\int_0^\infty\left[\frac{df(t)}{dt}exp(-st)\right]dt=\left[f(t)exp(-st)\right]_0^\infty+s\int_0^\infty f(t)exp(-st)dt=sF(s)-f(0)$$

<u>ラプラス変換の応用：微分方程式をラプラス変換で解く</u>

完全混合槽のトレーサー入力の応答の微分方程式をラプラス変換で解く

完全混合槽のトレーサー入力流量 $m(t)$ [mol/s]と出力 c(t)

$$\frac{dc(t)}{dt}=-\frac{c(t)}{\tau}+\frac{m(t)}{V}$$

一定の流入トレーサー濃度を仮定：$m(t)=a$　　(a>0)

初期条件：$c(0)=0$

ラプラス変換して変形

$$sC(s)-c(0)=-\frac{C(s)}{\tau}+\frac{M(s)}{V}$$

$$\left(s+\frac{1}{\tau}\right)C(s)=c(0)+\frac{M(s)}{V}$$

$$C(s)=\frac{\tau\left(c(0)+\frac{M(s)}{V}\right)}{(\tau s+1)}$$

$m(t)/F$ は入口濃度 c_{IN} [mol/m^3]になる。$c(0)$=0、$M(s)/F=C_{IN}(s)$とすると、

$$C(s)=\frac{\left(\frac{\tau}{V}\right)M(s)}{(\tau s+1)}=\frac{\frac{M(s)}{F}}{(\tau s+1)}=\frac{1}{(\tau s+1)}C_{IN}(s)$$

伝達関数 $G(s)$の定義：出力のラプラス変換／入力のラプラス変換

$$G(s)=\frac{C(s)}{C_{IN}(s)}$$

例:1 段完全混合槽でのトレーサーの入出力の伝達関数

$$G(s)=\frac{1}{(\tau s+1)}$$

ラプラス変換の例: $\frac{d^2x}{dt^2}=-\omega^2 x$ を解く(一般解 $x(t)=a\sin(\omega t)+b\cos(\omega t)$)

$y=\frac{dx}{dt}$ とおく。

$$\frac{dy}{dt}=-\omega^2 x$$

ラプラス変換して

$$Y(s)=sX(s)-x(0)$$

$$sY(s)-y(0)=-\omega^2 X(s)$$

$$s^2X(s)-sx(0)-y(0)=-\omega^2 X(s)$$

$$\left(s^2+\omega^2\right)X(s)=sx(0)+y(0)$$

$$X(s)=\frac{sx(0)+y(0)}{\left(s^2+\omega^2\right)}$$