< 8 週>1 次遅れ系の P, PI, PID 制御についてラプラス変換形式で取り扱うことを学ぶ(教科書第 5 章 p.58-71)

積分のラプラス変換

$$f(t)=\frac{dg(t)}{dt}$$

$$g(t)=\int f(t)dt$$

$$\int_0^{\infty}\left[\frac{dg(t)}{dt}exp(-st)\right]dt=\int_0^{\infty}f(t)exp(-st)dt=F(s)$$

$$=sG(s)-g(0)$$

$$G(s)=\frac{F(s)+g(0)}{s}=\frac{F(s)+\int f(t)dt}{s}$$

伝達関数：出力のラプラス変換／入力のラプラス変換

(δ 関数のラプラス変換=1 なので入口が δ 関数のときの出力のラプラス変換=伝達関数)

例:1 段完全混合槽のトレーサー入力ステップ応答を考える

C_{IN}=a=const.

$$C_{IN}(s)=\frac{a}{s}$$

$$C(s)=\frac{C_{IN}(s)}{(Ts+1)}=\frac{a}{s(Ts+1)}=a\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+\frac{1}{T}}\right)=a\left(\frac{\frac{1}{T}}{s\left(s+\frac{1}{T}\right)}\right)$$

$$C_{IN}(s)=\frac{a}{s}$$

$$C(t)=a\left(1-exp\left(-\frac{t}{T}\right)\right)$$

滞留時間 T_1、T_2 の 2 段の直列に接続された完全混合槽の場合の伝達関数

$$\frac{dC_1}{dt}=\frac{(C_0-C_1)}{T_1}$$

$$\frac{dC_2}{dt}=\frac{(C_1-C_2)}{T_2}$$

初期条件：$C_1(0)=C_2(0)=0$

$$sC_1(s)=\frac{(C_0(s)-C_1(s))}{T_1}$$

$$sC_2(s)=\frac{(C_1(s)-C_2(s))}{T_2}$$

$$C_1(s)=\frac{C_0(s)}{(T_1s+1)}$$

$$C_2(s)=\frac{C_1(s)}{(T_2s+1)}=\frac{1}{(T_1s+1)}\times\frac{1}{(T_2s+1)}C_0(s)$$

したがって伝達関数は次のとおりになる。

$$\frac{C_2(s)}{C_0(s)}=\frac{1}{(T_1s+1)}\times\frac{1}{(T_2s+1)}$$

→直列多段の場合、入口→最終段出口の伝達関数は、それぞれの段の伝達関数の積となる。

2 段完全混合槽に単位インパルスを入れたときの応答

C_0 が単位インパルスのとき、$C_0(s)=1$。したがって、単位インパルスを入力したときの出力 $C_2(s)$は次のようになる。

$$C_2(s)=\frac{1}{(T_1s+1)}\times\frac{1}{(T_2s+1)}\times 1=\frac{1}{(T_1s+1)}\frac{1}{(T_2s+1)}$$

$T_1=T_2=T$ のとき、次式を得る。

$$C_2(s)=\frac{1}{(Ts+1)^2}=\frac{1}{T^2\left(s+\frac{1}{T}\right)^2}=\frac{1}{T^2}\times\frac{1}{\left(s+\frac{1}{T}\right)^2}$$

ラプラス変換表から次式を得る。

$$C_2(t)=\frac{t}{T^2}exp\left(-\frac{t}{T}\right)$$

T_1 と T_2 が等しくないとき、a,b を定数として次のように置き換える。

$$C_2(s)=\frac{1}{(T_1s+1)(T_2s+1)}=\frac{a}{(T_1s+1)}+\frac{b}{(T_2s+1)}=\frac{a(T_2s+1)+b(T_1s+1)}{(T_1s+1)(T_2s+1)}=\frac{(aT_2+bT_1)s+a+b}{(T_1s+1)(T_2s+1)}$$

分子の定数項と、s に対して 1 次の項がそれぞれ次のようになる。

$$a+b=1$$

$$aT_2+bT_1=0$$

したがって、b を消去して

$$b=1-a$$

$$0=aT_2+bT_1=aT_2+(1-a)T_1=a(T_2-T_1)+T_1$$

$$a=\frac{-T_1}{T_2-T_1}=\frac{T_1}{T_1-T_2}$$

$$b=1-a=\frac{T_1-T_2-T_1}{T_1-T_2}=\frac{T_2}{T_2-T_1}$$

したがって次式を得る。

$$C_2(s)=\frac{\left(\frac{T_1}{T_1-T_2}\right)}{(T_1s+1)}+\frac{\left(\frac{T_2}{T_2-T_1}\right)}{(T_2s+1)}=\frac{\left(\frac{1}{T_1-T_2}\right)}{\left(s+\frac{1}{T_1}\right)}+\frac{\left(\frac{1}{T_2-T_1}\right)}{\left(s+\frac{1}{T_2}\right)}$$

第 1 項、第 2 項をそれぞれ逆ラプラス変換すると $C_2(t)$は次式となる。

$$C_2(t) = \left(\frac{1}{T_1 - T_2}\right) exp\left(-\frac{t}{T_1}\right) + \left(\frac{1}{T_2 - T_1}\right) exp\left(-\frac{t}{T_2}\right)$$

実際に F=1m^3/s, V_1=10 m^3, V_2=5m^3 として単位インパルスを入れた場合、微分方程式を Euler 法で数値計算した場合(0.5s ステップ)と、上の式で計算した場合を比較すると下の図のようになり、両者は良好に一致する。