<10 週>フーリエ変換について学ぶ

これまでに学んだ入力形態

ステップ

インパルス(δ関数)

新しい入力形態：周期的(周期 T)に変動する入力

周期的入力は角周波数 $2k\pi/T=k\omega$(k は整数)の cos, sin カーブの足し算でできる

$$f(t)=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\cos k\omega t+b_k\sin k\omega t\right]$$

$$a_0=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$$

$$a_k=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos\left(\frac{2k\pi t}{T}\right)dt$$

$$b_k=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin\left(\frac{2k\pi t}{T}\right)dt$$

例：次の周期 $T=2\pi$ の関数 $f(t)$をフーリエ級数展開したらどうなるか。

$f(t)=1$ $(0<t<\pi)$

-1 $(\pi<t<2\pi)$

$$a_k=\frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(kt)dt=0$$

$$b_k=\frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(kt)dt=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(kt)dt-\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi}\sin(kt)dt=-\frac{1}{k\pi}\left[\cos(kt)\right]_0^{\pi}+\frac{1}{k\pi}\left[\cos(kt)\right]_{\pi}^{2\pi}$$

$$=-\frac{1}{k\pi}\left[\cos(k\pi)-1\right]+\frac{1}{k\pi}\left[\cos(2k\pi)-\cos(k\pi)\right]=\frac{1+\cos(2k\pi)-2\cos(k\pi)}{k\pi}$$

k が奇数の場合

$$b_k=\frac{1+\cos(2k\pi)-2\cos(k\pi)}{k\pi}=\frac{1+1+2}{k\pi}=\frac{4}{k\pi}$$

k が偶数の場合

$b_k=0$

別の入力表現

$$f(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[c_k\exp(jk\omega t+\theta)\right]$$

$\exp(jk\omega t)=\cos(k\omega t)+j\sin(k\omega t)$　(ここで j は虚数単位)

例 $f(t)=1$ $(0<t<\pi)$

-1 $(\pi<t<2\pi)$

$$c_k=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(t)e^{-jkt}dt=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}e^{-jkt}dt-\frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{2\pi}e^{-jkt}dt$$
$$=-\frac{1}{j2\pi k}\left[e^{-jkt}\right]_0^{\pi}+\frac{1}{j2\pi k}\left[e^{-jkt}\right]_{\pi}^{2\pi}=\frac{j}{2\pi k}\left[e^{-jk\pi}-1-e^{-j2k\pi}+e^{-jk\pi}\right]=\frac{1}{2\pi k}\left[2e^{-jk\pi}-1-e^{-j2k\pi}\right]$$

k が奇数の場合

$$e^{-jk\pi}=-1$$
$$e^{-j2k\pi}=1$$

であるので、

$$c_k=\frac{j}{2\pi k}\left[2e^{-jk\pi}-1-e^{-j2k\pi}\right]=\frac{1}{jk}\left[-2+0-1-1-0\right]=\frac{2}{\pi k}j$$

k が偶数の場合

$$e^{-jk\pi}=1$$
$$e^{-j2k\pi}=1$$

であるので、

$$c_k=\frac{j}{2\pi k}\left[2e^{-jk\pi}-1-e^{-j2k\pi}\right]=\frac{j}{2\pi k}\left[2-1-1\right]=0$$

インパルス列のフーリエ級数展開

一定間隔(T)でδ関数が発生する周期関数のフーリエ級数展開

まず、有限幅 a、有限高さ L のインパルス列のフーリエ級数展開を考える。

$$f(t)=\begin{cases} y & (0\le t<a) \\ 0 & (a\le t<T) \end{cases}$$

ただし、y は定数、$a<T$ とする。

次式で求められる a_0、a_k、b_k をそれぞれ求める。

$$a_0=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt=\frac{1}{T}\left\{\int_0^a ydt+\int_a^T 0dt\right\}=\frac{1}{T}\int_0^a ydt=\frac{ay}{T}$$

したがって、a_0 は $f(t)$の平均値 ay/T となる。δ関数の場合は、ay=1 を保ちながら a をゼロに近づけるので、a_0=1/T となる。

$$a_k=\frac{2}{T}\int_0^a f(t)\cos\left(\frac{2k\pi t}{T}\right)dt=\frac{2}{T}\int_0^a y\cos\left(\frac{2k\pi t}{T}\right)dt=\frac{2y}{T}\int_0^a\cos\left(\frac{2k\pi t}{T}\right)dt$$
$$=\frac{2y}{T}\left[\frac{T}{2k\pi}\sin\left(\frac{2k\pi t}{T}\right)\right]_0^a=\frac{y}{k\pi}\sin\left(\frac{2k\pi a}{T}\right)$$

δ関数の場合は、ay=1 を保ちながら a をゼロに近づける。θ がゼロに近いときには $\sin\theta=\theta$ の近似が成り立つので、上の式は

$$a_k=\frac{y}{k\pi}\sin\left(\frac{2k\pi a}{T}\right)=\left(\frac{y}{k\pi}\right)\left(\frac{2k\pi a}{T}\right)=\frac{2ay}{T}$$

と近似ができる。ここで ay=1 を代入すると

$$a_k=\frac{2}{T}$$

となる。

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin\left(\frac{2k\pi t}{T}\right)dt = \frac{2}{T}\int_0^a y\sin\left(\frac{2k\pi t}{T}\right)dt$$

$$= \frac{2y}{T}\left[-\frac{T}{2k\pi}\cos\left(\frac{2k\pi t}{T}\right)\right]_0^a = \frac{y}{k\pi}\left[1-\cos\left(\frac{2k\pi a}{T}\right)\right]$$

ここで $\frac{2k\pi a}{T} = \varphi$ とおくと、

$$b_k = \frac{y}{k\pi}\left[1-\cos(\varphi)\right]$$

$\cos(\varphi)$ と $\sin(\varphi)$ の間には次の関係がある。

$$(\sin(\varphi))^2 = (1+\cos(\varphi))(1-\cos(\varphi))$$

$$(1-\cos(\varphi)) = \frac{(\sin(\varphi))^2}{(1+\cos(\varphi))}$$

この関係と sin の性質ならびに ay=1 の関係を用いると次のように変形できる。

$$b_k = \frac{y}{k\pi}\left[1-\cos(\varphi)\right] = \frac{y}{k\pi}\frac{(\sin(\varphi))^2}{(1+\cos(\varphi))} = \frac{y}{k\pi}\frac{\varphi^2}{2} = \frac{y}{2k\pi}\left(\frac{2k\pi a}{T}\right)^2$$

$$= \frac{2k\pi a^2 y}{T^2} = \frac{2k\pi ay}{T^2}a = \frac{2k\pi}{T^2}a$$

したがって、a→0 とすると b_k は 0 になる。

なお、積分するまえに sin 関数を X=0 の近くで sin$X$=X と近似する方法もある。

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin\left(\frac{2k\pi t}{T}\right)dt = \frac{2}{T}\int_0^a y\sin\left(\frac{2k\pi t}{T}\right)dt$$

$$= \left(\frac{2y}{T}\right)\left(\frac{2k\pi}{T}\right)\int_0^a t\,dt = \frac{4k\pi y}{T^2}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^a = \frac{2k\pi y a^2}{T^2} = \frac{2k\pi a}{T^2}$$