13回ナイキスト線図を学ぶ~14回ナイキスト線図とプロセスの周波数応答の関係を学ぶ(教科書第4章 p.49 - 52)～15回:PIDのパラメータ調整法について学ぶ(教科書第7章 p.87-97)
2021/11/17 配布

定常発振の条件：一巡伝達関数でゲイン=1、位相遅れπ

位相遅れπでゲイン>1、<1の場合はそれぞれどうなるか

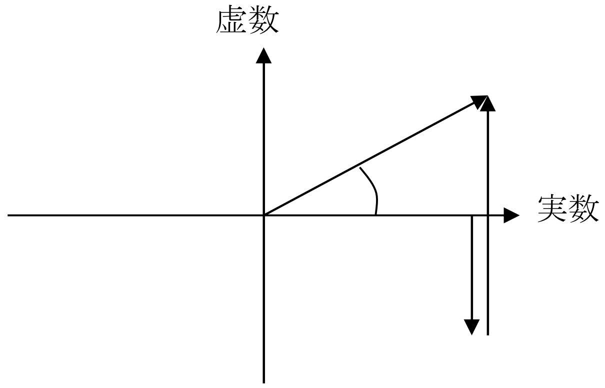
<u>ボード線図によるネガティブフィードバックの安定性判別</u>
$G(j\omega)$でωを大きくしていく
　横軸　各周波数ωあるいは周波数、縦軸　$20\log(|G|)$、ϕのグラフを描く。
　位相余裕またはゲイン余裕から安定性を判別する。
周波数応答が必要である理由：制御ループの安定性を評価するうえで役に立つ

直列につながった要素のボード線図(2段の例)
　縦軸：$20\log(|G_1G_2|)=20\log(|G_1|)+20\log(|G_2|)$
　$\phi=\phi_1+\phi_2$

PID制御でむだ時間Lを持つ時定数τの1段完全混合槽のトレーサー濃度制御をする場合の周波数応答。

$$G_p(j\omega)G_c(j\omega)=\frac{k_p\left(1+\frac{1}{j\omega T_I}+j\omega T_D\right)\exp(-j\omega L)}{1+j\omega\tau}=\frac{k_p\left\{1+j\left(\omega T_D-\frac{1}{\omega T_I}\right)\right\}\exp(-j\omega L)}{1+j\omega\tau}$$

ベクトル線図で説明する、PID制御でD動作がなぜ制御を安定化する方向になるかの説明。(下の図に自分でその説明を入れてみよう)　I動作は位相を遅らせる(不安定化)　ゲイン余裕、位相余裕が減る



(この図でどの矢印がI動作になり、どの矢印がD動作になるか、教科書を見て予習しよう)

ゲインが 1 になる ω の求め方の例(1 段かくはん槽トレーサー濃度制御の場合)

$$\left|G_p(j\omega)G_c(j\omega)\right| = \frac{k_p\sqrt{1+\left(\omega T_D - \dfrac{1}{\omega T_I}\right)^2}}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}} = 1$$

$$1+\left(\omega T_D - \frac{1}{\omega T_I}\right)^2 = \frac{1}{k_p{}^2}\left(1+\omega^2\tau^2\right)$$

$$1+\omega^2 T_D{}^2 - \frac{2T_D}{T_I} + \frac{1}{\omega^2 T_I{}^2} = \frac{1}{k_p{}^2}\left(1+\omega^2\tau^2\right)$$

$$\omega^2\left(T_D{}^2 - \frac{\tau^2}{k_p{}^2}\right) + \left(1 - \frac{2T_D}{T_I} - \frac{1}{k_p{}^2}\right) + \frac{1}{\omega^2 T_I{}^2} = 0$$

$$x^2\left(T_D{}^2 - \frac{\tau^2}{k_p{}^2}\right) + \left(1 - \frac{2T_D}{T_I} - \frac{1}{k_p{}^2}\right)x + \frac{1}{T_I{}^2} = 0$$

$$x = \omega^2$$

$$x = \frac{-\left(1-\dfrac{2T_D}{T_I}-\dfrac{1}{k_p{}^2}\right) + \sqrt{\left(1-\dfrac{2T_D}{T_I}-\dfrac{1}{k_p{}^2}\right)^2 - \dfrac{4}{T_I{}^2}\left(T_D{}^2-\dfrac{\tau^2}{k_p{}^2}\right)}}{2\left(T_D{}^2-\dfrac{\tau^2}{k_p{}^2}\right)}$$

PID 制御の周波数依存について
P 制御：ゲイン一定、位相変化なし
I 制御：ωが小さいとゲイン大、位相-90 度
D 制御：ωが大きいとゲイン大、位相+90 度

<u>ベクトル線図(ナイキスト線図)</u>
ベクトル軌跡の書き方：　$G(\mathrm{j}\,\omega)$で ω が小さいものから大きくしていき、複素平面上にプロットしていく。

PID のパラメータ調整法について学ぶ(教科書第 7 章 p.87-97)。

<u>限界感度法</u>
P 制御にする
比例ゲインを上げて定常発振させる
発振したときの比例ゲイン K_p と振動周期 P_u を記録する

振動周期の求め方
1)時間と出力のグラフから求める
2) 一巡伝達関数のボード線図から、定常発振時の位相 φ=-π[rad]=-180 度あるいはゲイン=1(=0dB)のところの ω を読み取る　$P_\mathrm{u}=2\pi/\omega$

例:プラグフロー(むだ時間 L と時定数 T)の系で P 制御でトレーサー入口濃度 C_IN を制御する。

$$C_\mathrm{IN}(t) = K_\mathrm{p}(C_\mathrm{obj} - C_\mathrm{meas}(t)) = k(C_\mathrm{obj} - C\,(t-L))$$

$$\mathrm{d}C/\mathrm{d}t = (C_\mathrm{IN} - C)/\,T$$

この系の一巡伝達関数は次式になる。

$$G_\mathrm{c}G_\mathrm{p} = K_\mathrm{p}\exp(-\mathrm{j}\,\omega L)/(1+\mathrm{j}\,\omega T)$$

φ=-π となる ω を求める。

$\phi = -\omega L - \tan^{-1}(\omega T) = -\pi$
(一般にこの式を満たすωは trial-and-error で求める)

このωにおける一巡伝達関数の絶対値$|G_c G_p|$が 1 になるK_pと振動周期を求めると、これらがそれぞれK_pとP_uになる。

教科書 p.89 の方法に従って、PID パラメーターを決定する。

その他の決定法(制御対象の系の数学モデルが利用できる場合)
例:PID パラメーターを与えて応答を計算させ、誤差 2 乗の積分値$\int (Cobj - C)^2 dt$を計算し、エクセルのソルバー機能を用いて誤差 2 乗積分値が最小になるように PID のパラメーターを変えていく。