# プロセス制御
# 3-4回

化学システム工学プログラム
清水忠明



## この微分方程式は解析解がある

微分方程式(1段完全混合槽へのトレーサー流入時の濃度変化)

$$\frac{dC}{dt} = \frac{C_{IN} - C}{\tau}$$

$C_{IN}$が定数の時の解析解

<u>例1　ステップ応答($C_{IN}$が階段状に変化するとき)</u>

$C_{IN} = 0$　　　($t$<0)

$C_{IN} = C_1$ (=一定)　($t$>0)

$C$の初期条件$C(0)$

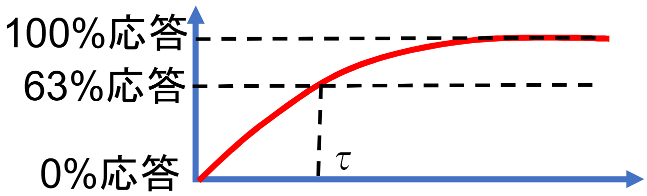
## この微分方程式は解析解がある

式1を次のように変形し、0～$t$まで積分すると、$C$は$C(0)$～$C(t)$に変化する。

$$\int_{C(0)}^{C(t)} \frac{d(C_1 - C_{OUT})}{(C_1 - C_{OUT})} = -\frac{1}{\tau}\int dt$$

$$\left[ln(C_1 - C)\right]_{C(0)}^{C(t)} = -\frac{1}{\tau}[t]_0^t$$

$$C_1 - C(t) = (C_1 - C(0))exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$




## この微分方程式は解析解がある

例2　インパルス応答(短時間の間にある量を注入)

$C_{IN}(t)=0$

$t$=0 で$M$[mol]のトレーサーを投入する。

投入前のかくはん槽内トレーサー濃度はゼロ：$C(t)=0$　at $t<0$

トレーサーは瞬時に混合するので、投入と同時に完全混合槽内濃度はM/$V$となる。

$C(0)=M/V$

その後は流入濃度がゼロであるので、

$dC/dt = (C_{IN} - C)/\tau = -C/\tau$

$C(t)=(M/V)\exp(-t/\tau)= C(0)\exp(-t/\tau)$

## ディラックのδ関数

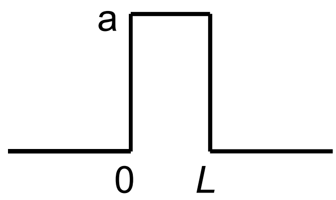
単位インパルス(t=0を除いて全てゼロ、*t*=0での値は∞、ー∞～∞の範囲で積分すると1になる関数。)

$$\delta(t) = 0 \qquad t \neq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

高さ*a*, 幅*L*のパルスを*aL*=1を保ちながら*L*→0

•極めて短い時間にインパルスでトレーサーを注入する場合を表す関数




## 単位階段関数

δ関数を―∞から*t*まで積分した関数

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(t) dt = u(t)$$

u(*t*) = 0  (*t*<0)

= 1  (*t*>1)

*t*=0でポンプを駆動して一定流量でトレーサーを流入させる関数として使われる

## この微分方程式の数値解(近似解)

近似解を得る簡単な数値積分の方法(Euler法)

時間とともに変化する関数$X(t)$が微分方程式

$$\frac{dX}{dt}=f(X,t)$$

のとき、時刻$t$での$X$の値$X(t)$が与えられれば、それより微小時間$\Delta t$が経過した後の$X(t+\Delta t)$の近似値は次の式で与えられる。

$$X(t+\Delta t)=X(t)+f(X,t)\Delta t$$

初期条件$X(0)$が与えられれば、適当な$\Delta t$を与えて$X$を次々と計算する。

## なぜ数値解と解析解の両方が必要か?

ある特定の条件(解析解が出せる条件)で解析解を計算し、数値解の正しさをチェックする。

現実の世界では、解析解が出せるような理想的な系はほとんどない。

非等温(発熱・吸熱)、逆混合、非1次反応・・・が現実の系

## 多変数微分方程式(多階)のEuler法

多変数

$$\frac{dX_i}{dt} = f_i(X_1, X_2, X_3, \cdots X_n, t)$$

$$X_i(t+\Delta t) = X_i(t) + f_i(X_1, X_2, X_3, \cdots X_n, t)\Delta t$$

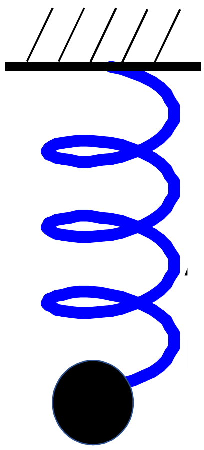
それぞれの変数に対してStep-by-Stepで計算する

## 現象を微分方程式で表す

2階の微分方程式は2変数の1階の微分方程式

例: ばねの先端におもりが付いた単振動

$$\frac{d^2X}{dt^2} = -\omega^2 X$$



$X$の1階微分を$Y$とおいた2つの式

$$\frac{dX}{dt} = Y$$

$$\frac{dY}{dt} = -\omega^2 X$$

## この微分方程式の数値解(近似解)

Euler法の問題点

$t$〜 $t$+Δ$t$の範囲で一定の微係数d$X$/d$t$を仮定しているが、$X$($t$+Δ$t$)における微係数は$X$($t$)における微係数と異なる。

誤差がだんだん積もってくる。

対策: Δ$t$を小さくする(計算数が増える)

## この微分方程式の数値解(近似解)

Runge-Kutta法(時間ステップΔ$t$当たり4回の計算)

$$k_1 = f(X, t)\Delta t$$

$$k_2 = f\left(X + \frac{k_1}{2}, t + \frac{\Delta t}{2}\right)\Delta t$$

$$k_3 = f\left(X + \frac{k_2}{2}, t + \frac{\Delta t}{2}\right)\Delta t$$

$$k_4 = f(X + k_3, t + \Delta t)\Delta t$$

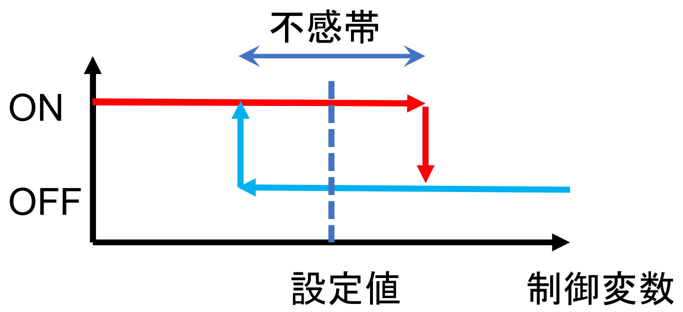
$$\Delta X = \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6}$$

$$X(t + \Delta t) = X(t) + \Delta X$$

## On-Off制御の原理

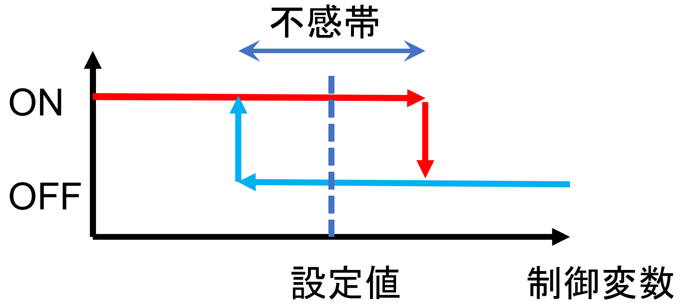
制御量が設定値より大きい(小さいとき)操作量をOFF、小さい (大きいとき)操作量をONにする。

- 加熱操作では操作対象の温度が設定温度より低いときにON、対象の温度が低いときにOFFとする。
- 冷却操作では、操作対象の温度が設定温度より低いときにOFF、対象の温度が低いときにONとする。




## 不感帯を必要とする理由

モーター，ヒーター，電球等の電気製品は，スイッチをオンにした瞬間に定常時に流れる電流の数倍の電流が流れる(「突入電流」と呼ぶ)ものが多くある．突入電流が頻繁に流れると電線などに予想以上に負荷が多くかかる．また，リレースイッチをオンからオフにすると放電が起こり，接点付近で発熱したり，電磁的ノイズを発生させ周囲の機器に影響を与える．



## 不感帯を必要とする理由(突入電流)

モーターの場合

モーターではコイルに電流を流して磁場を作る。コイル自身の抵抗は小さい。コイルが永久磁石の磁場を動くときに逆起電力が働き電流が制限される。

→モーターが動かないと逆起電力は働かない
→過大な電流が流れる

(起動時で停止しているとき、あるいはモーターが駆動しているチェーンなどが絡まって動かないとき)

モーターが動けない状態で電流を流し続けると焼け切れる

## 不感帯を必要とする理由(突入電流)

電気抵抗式ヒーターの場合

金属線などは温度が低いと抵抗が低い

→ヒーターが温まって抵抗が高くなった時に定格
→ヒーターが冷たいときは過大な電流が流れる(突入電流)

## 不感帯を必要とする理由(ON→OFFの時)

リレーOFFの時

電流が流れている回路を開くと電極間にはアーク放電が起こることがある。

アーク放電による機器の損傷、電磁的ノイズの発生

高圧の電流では、空気では絶縁破壊が起こりアークが発生することがおこるので、特殊な遮断器が必要になる。

## PID制御(実時間)

On-Offの制御の問題点
操作量が2値しか取れず不感帯があることで、制御変数の変動が必ずある。

→より滑らかな制御をするために、操作量を連続的に可変なものを使う

→制御変数と設定値が一致する操作量を自動的に求める手法としてのPID制御

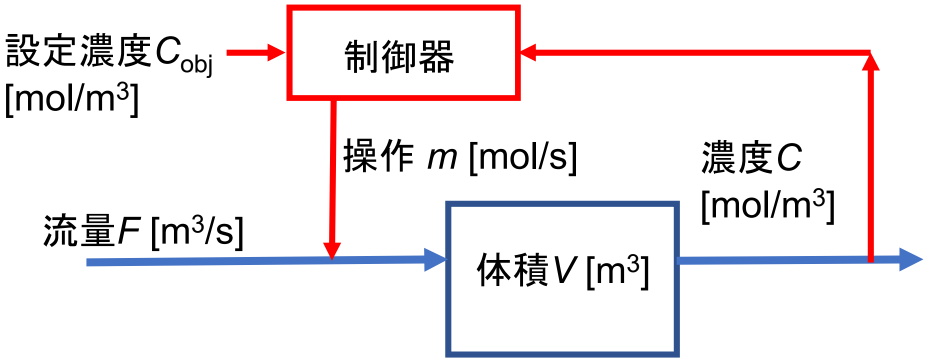
## PID制御(実時間)

設定値(SP)と現在の制御変数(PV)の偏差$e$

$e=(C_{obj} - C(t))$

を考える。偏差を常にゼロにする操作を見つける

完全混合槽トレーサー濃度変化の系で制御法を説明する




## P制御(実時間)

P制御

操作量$m$[mol/s]を設定値と現在の制御量の値の差に比例させる。

$m=k(C_{obj} - C(t))$

$$V\frac{dC}{dt} = -FC + k\left(C_{obj} - C\right) = -(F+k)C + kC_{obj}$$

$$= -(F+k)\left(C - \frac{k}{(F+k)}C_{obj}\right)$$

$k$: 比例ゲインと呼ばれる。

$k$=100/PBと表すこともある。PBは比例帯[%]と呼ばれる。

## P制御(実時間)

P制御で1段完全混合槽トレーサー濃度を制御したら

$$\frac{dC}{dt}=-\frac{(F+k)}{V}\left(C-\frac{k}{(F+k)}C_{obj}\right)$$

$$\left(C(t)-\frac{k}{(F+k)}C_{obj}\right)=\left(C(0)-\frac{k}{(F+k)}C_{obj}\right)exp\left(-\frac{(F+k)}{V}t\right)$$

定常状態でd*C*/d*t*=0になるので、定常濃度は次式になる。

$$\frac{dC}{dt}=-\frac{(F+k)}{V}\left(C-\frac{k}{(F+k)}C_{obj}\right)=0$$

$$C=\frac{k}{(F+k)}C_{obj}$$

制御量は設定値にならない！　制御量と設定値の差をオフセットと呼ぶ。

## P制御(実時間)

制御ループ内に時間遅れがない理想的な制御対象の場合、*k*を大きくするとオフセットは小さくでき、かつ応答も速くなる。

*k*を大きくする問題点：制御ループ内の時間遅れがあると不安定になる。

時間遅れがある場合の計算方法を説明する